KURVEN: VON DEN KEGELSCHNITTEN DER GRIECHISCHEN ANTIKE ZUR FRAKTALEN GEOMETRIE. EIN BEISPIEL FÜR EINEN LÄNGSSCHNITT

Manfred Kronfellner, Wien

„Dem forschenden Mathematiker erschließt sich neue Mathematik in Form eines Netzwerkes. Wenn er seine neuen Ergebnisse darstellt, dann tut er dies meist in Form einer axiomatisch aufgebauten Theorie. Seine Darstellung ist dann von Linearität geprägt. Wenn der Schüler Mathematik linear dargestellt erhält, wie soll er dann Mathematik selbst entdecken lernen? Immer wieder ist deshalb vorgeschlagen worden, Netzwerke mathematischer Sachverhalte im Unterricht zu erarbeiten. Ein solcher Unterricht kann jedoch in ein unentwirrbares Chaos münden, bei dem die Schüler keinen roten Faden mehr erkennen. Also ist eine gewisse Systematik nötig." (Vollrath 1987, S. 374)

Im Mathematikunterricht dominiert die innermathematische Systematik; diese führt zu (Bruchstücken von) solchen linearen Theorien. Um zu einer stärkeren Vernetzung zu gelangen, ist es notwendig, die Dominanz der einen Systematik aufzuweichen und (mindestens) eine weitere Systematik (im Ansatz) zuzulassen bzw. zu verwenden. Eine ähnliche „vertikale Gliederung" verspricht man sich auch von fundamentalen Ideen. (Vgl. Schweiger 1992, S. 207)

In anderen Schulfächern wird in zunehmendem Maße das Aufweichen der jeweils dominierenden Fachsystematik propagiert: im Geschichtsunterricht etwa soll die dominante chronologische Systematik in vermehrtem Maße durch die Behandlung von **Längsschnitten** ergänzt werden, d. h. durch die Bearbeitung desselben Themas in verschiedenen Zeitepochen. (Vgl. BMUKS 1987b, S. 1!) Im Physikunterricht der 6. Schulstufe lässt man sich – insb. zu Beginn – nicht von einer traditionellen Physik-Systematik einengen, sondern bespricht verschiedenste physikalische Effekte des täglichen Lebens. (Vgl. Lehrplan 1985, S. 218: „Begegnung mit Physik im Alltag")

In vielen Fächern war auch schon bisher das Verlassen der jeweils dominierenden Systematik unumgänglich (z. B. Musik: Musikgeschichte – Formenlehre, analog Deutsch, u. s. w.)

Auch im Mathematikunterricht, vor allem aber im Wahlpflichtfach oder im Zuge einer Fachbereichsarbeit, besteht die Möglichkeit der Behandlung solcher Längsschnitte (im weitesten Sinn, nicht notwendigerweise nur historische Themen; einige Vorschläge samt Literaturhinweisen siehe Kronfellner 1998, S. 52f). Der nachfolgende Längsschnitt ist eine überarbeitete Fassung von Kronfellner 1998, Kapitel 13 (S. 96ff).

1 Kegelschnitte

Bereits bei den Griechen in der Antike traten Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln auf. Ihre Namen gehen auf Problemstellungen zurück, bei denen Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelt werden sollen. Solche Fragestellungen sind bereits bei den Babyloniern zu finden und wurden später von Euklid systematisch untersucht (Euklid, S. 135ff; vgl. auch van der Waerden 1966, S. 102ff und S. 198ff). Das Wort parabolé (παραβολή) bedeutete soviel wie "Anlegen", nämlich Anlegen eines flächengleichen Quadrates (y^2) an ein gegebenes Rechteck ($2p \cdot x$). Ellipse kommt von ekleipsis (ἔκλειψις) bzw. elleipsis (ἔλλειψις), was so viel wie

"Weglassung", "Verminderung" bedeutet. Bei der Flächenumwandlung mit Hilfe einer Ellipse muss nämlich das gegebene Rechteck $2p \cdot x$ zuerst um ein kleines Rechteck vermindert werden. Ähnlich liegt der Fall bei der Hyperbel: hyperbolé (ὑπερβολή) bedeutet "Überschuss"; hier muss das Rechteck $2p \cdot x$ zuerst vergrößert werden. (Vgl. Reichel 1991a, S. 120 – 123!)

Parabeln und Hyperbeln traten aber auch beim Versuch auf, das Delische Problem der Würfelverdopplung – also der Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ – zu lösen. Menaichmos (um 350 v. Chr.) erkannte, dass dieses Problem äquivalent ist zur Ermittlung zweier Zahlen x und y, für die gilt:

$$a : x = x : y = y : b$$

Wählt man a = 1 und b = 2, so ergibt sich aus

$$1 : x = x : y = y : 2$$

insbesondere $x = \sqrt[3]{2}$. Denn:

$$1 : x = x : y = y : 2 \Leftrightarrow y = x^2 \wedge y^2 = 2x \Leftrightarrow (x^2)^2 = 2x \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Die Zahlen x und y nennt man auch "mittlere Proportionale".

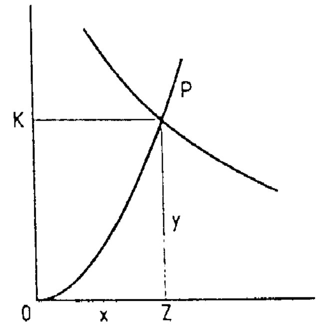

Abb. 1

Es gilt aber auch:

$$1 : x = x : y = y : 2 \Leftrightarrow y = x^2 \wedge xy = 2$$

D.h., die Zahlen x und y sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Parabel $y = x^2$ mit der Hyperbel $xy = 2$.

Die Griechen kannten natürlich noch keine Koordinaten in unserem Sinn. Sie gaben Kurven durch sogenannte "Symptome" an. Darunter versteht man eine Bedingung, durch die ein auf der Kurve liegender Punkt charakterisiert ist. Diese Symptome entsprechen inhaltlich in etwa unseren Kurvengleichungen.

Menaichmos stellte sich Kegelschnitte als Schnitte eines Kegels mit einer zu einer Erzeugenden normalen Ebene vor. Durch entsprechende Wahl des Öffnungswinkels α des Kegels erreichte er entweder eine Parabel (für $\alpha=90°$), eine Hyperbel (genauer: einen Hyperbelast; für $\alpha>90°$) oder eine Ellipse (für $\alpha<90°$). Erst Apollonios von Perge (262? – 190? v. Chr.) ging in seinem Werk "Konika", einer systematischen Untersuchung der Kegelschnitte in 8 Büchern, dazu über, einen Kegel mit festem Öffnungswinkel mit Ebenen verschiedener Neigung zu schneiden, um alle möglichen Kegelschnitte zu erhalten.

Zur Lösung der "drei klassischen Probleme der Antike" (das sind die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung und die Quadratur des Kreises) erdachten die Griechen verschiedene Methoden, auch mechanische Hilfsmittel bzw. Geräte. (Vgl. Kaiser/Nöbauer, S. 130 – 151!) Auch Platon wird die Erfindung eines Gerätes zur Ermittlung der mittleren Proportionalen zugeschrieben. (Vgl. Bretschneider 1870, S. 141!) Deshalb ist es auch umso überraschender, dass Platon andere Mathematiker wegen der Verwendung solcher Methoden tadelte; nach

Plutarch soll Platon gesagt haben: "... *denn auf solche Art werde der Vorzug der Geometrie aufgehoben und verdorben ...*" (Zitiert nach Bretschneider 1870, S. 143.) Platon wollte nur Methoden zulassen, die man später als "Konstruktion mit Zirkel und Lineal" bezeichnete. (Vgl. Kaiser/Nöbauer 1984, S. 130 ff, oder Radbruch 1989, S. 151!)

Warum gerade diese Instrumente und nicht auch eines jener anderen Geräte, die zur Lösung dieser Probleme erdacht wurden?

Die Beschränkung auf Zirkel und Lineal, die sogenannten "Euklidischen Werkzeuge", leitet sich aus den Postulaten ab, die am Anfang der Elemente des Euklid stehen:

> *"Gefordert soll sein:*
>
> *1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*
>
> *2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend verlängern kann,*
>
> *3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.*
>
> *4. ...*
>
> (Euklid, S. 2)

Alles was mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, ist auch aus den Axiomen und Postulaten der Geometrie beweisbar und stellt daher "gesicherte Erkenntnis" dar, gefeit vor Angriffen von Skeptikern und Sophisten.

Dennoch beschäftigten sich in der Folge die griechischen Mathematiker immer wieder auch mit Kurven, die nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar waren.

Die drei klassischen Probleme der Antike beschäftigten sogar Mathematiker bis ins vorige Jahrhundert; erst in dieser Zeit konnte allgemein mit algebraischen Mitteln gezeigt werden, dass diese drei Probleme nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind.

2 Die Cissoide

Diokles, ein Zeitgenosse des Apollonios, entdeckte eine Kurve, die ebenfalls zur Lösung des Delischen Problems verwendet werden kann. Allgemein kann eine Cissoide auf folgende Weise definiert werden:

Es sei O ein fester Punkt und C, D seien zwei Kurven. (In unserem Falle der "Cissoide des Diokles" ist C ein Kreis mit dem Radius r und D eine Gerade.) Legt man durch O eine beliebige Gerade g, so erhält man einen Cissoidenpunkt P durch die Bedingung:

$$\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$$

wobei $P_1 \in C$ und $P_2 \in D$ Schnittpunkte der Geraden g mit den Kurven C und D sind. (Siehe Abb. 2!)

Die Gestalt dieser Kurve erinnert – mit einiger Phantasie – an ein Efeublatt; daher auch der Name: Cissoide kommt von kissos (κισσός), Efeu.

Zur Bestimmung der mittleren Proportionalen gehen wir folgendermaßen vor:

Wir errichten im Mittelpunkt Z des Kreises C das Lot auf den Durchmesser $\overline{OA}$ und tragen auf diesem Lot die Strecke $\frac{1}{2} \cdot r = \overline{ZM}$ auf.

Dann gilt für jenen Cissoidenpunkt P, der auf der Verlängerung der Geraden durch A und M liegt:

$$\frac{a}{\overline{LP}} = \frac{r}{\frac{1}{2} \cdot r} = 2\,, \quad \text{also} \quad \overline{LP} = \frac{a}{2}$$

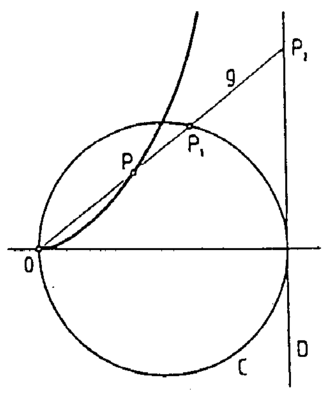

Abb. 2

Wir wollen nun zeigen, dass $x = \overline{OL}$ und $y = \overline{LS}$ die gesuchten mittleren Proportionalen sind. Auf Grund der Konstruktionsvorschrift der Cissoide gilt $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$ und damit $\overline{AT} = \overline{OL}$ bzw. $\overline{AL} = \overline{OT}$. Damit gilt:

$$\Delta OLP \sim \Delta OTP_1 = \Delta ALS \sim \Delta SLO$$

Daraus folgt:

$$\overline{LP} : \overline{OL} = \overline{OL} : \overline{LS} = \overline{LS} : \overline{AL}$$

oder:

$$\frac{a}{2} : x = x : y = y : a$$

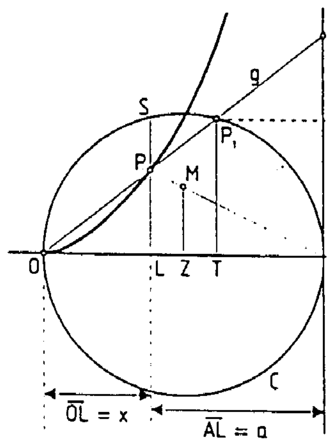

Abb. 3

Weiteres über die Cissoide siehe Oettinger 1985!

3 Die Konchoide

Beim Versuch, das Problem der Winkeldreiteilung zu lösen, stieß man in der Antike auf die Konchoide. Diese ist folgendermaßen definiert: Es sei C eine gegebene Kurve. (In unserem speziellen Fall wählen wir für C eine Gerade; man spricht dann von einer "Geradenkonchoide".) Weiters sei O ein fester Punkt (der "Pol") und k>0 ein konstanter Wert. Legt man eine beliebige Gerade durch O und trägt man vom Schnittpunkt von g mit C den Wert k nach beiden Seiten ab, so erhält man zwei Punkte. Die Menge aller so konstruierten Punkte bilden die (beiden Äste der) Konchoide.

Auch bei dieser Kurve leite sich der Name von der Gestalt ab: sie erinnert an die einer Muschel, und "Muschel" heißt auf griechisch kónche (κόγχη). (In Abb. 4 ist k kleiner als der Abstand von O zu c. Ist k größer als dieser Abstand, so ergibt sich insbesondere bei dem durch den Pol verlaufenden Ast der Konchoide ein etwas anderes Aussehen. (Vgl. Abb. 6!)

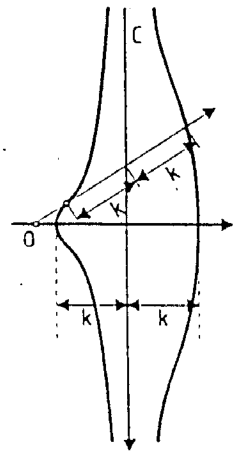

Abb. 4

Um zu sehen, wie die Konchoide zur Winkeldreiteilung verwendet werden kann, betrachten wir folgende Skizze (Abb. 5):

Gegeben ist der Winkel $\sphericalangle ABC$. Wir zeichnen das Lot von A auf die Gerade BC und eine Parallele zu BC durch A. Auf dieser Parallelen ermitteln wir einen Punkt F so, dass gilt: $\overline{EF} = 2\overline{BA}$. (Vgl. Abb.5!) Weiters sei G der Halbierungspunkt der Strecke [E,F]. Dann gilt:

$$\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{GA} = \overline{BA}$$

Daraus folgt:

$$\sphericalangle ABG = \sphericalangle AGB = \sphericalangle FAG + \sphericalangle GAF =$$

$$= 2 \cdot \sphericalangle GFA = 2 \cdot \sphericalangle GBC$$

und somit:

$$\sphericalangle ABC = 3 \cdot \sphericalangle GBC$$

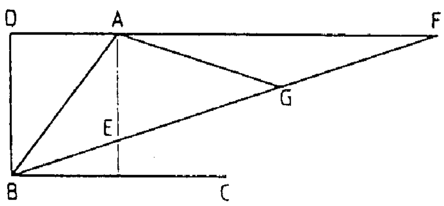

Abb. 5

Das Problem ist dabei "nur": Wie erhält man den Punkt F bzw. die Gerade BF? Eine Möglichkeit besteht im "Anpassen" eines mit der Länge $2 \cdot \overline{BA}$ markierten Lineals. Man kann aber auch eine Konchoide verwenden. Wir zeichnen einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $\overline{AB}$. Außerdem zeichnen wir eine Konchoide mit dem Pol B, mit der Geraden c und dem Wert $k = \overline{AB}$. Ein Schnittpunkt der Konchoide mit dem Kreis ist der Punkt G. Genauso wie zuvor zeigt man nun, dass gilt:

$$\sphericalangle GBC = 3 \cdot \sphericalangle ABC$$

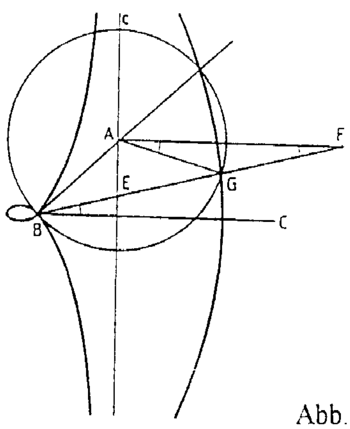

Abb. 6

Die Konchoide kann darüber hinaus auch zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung verwendet werden. Weitere interessante Details zur Konchoide siehe Oettinger 1984!

4 Die Quadratrix

Bei den zahllosen Versuchen, das Problem der Quadratur des Kreises zu lösen (d.h. aus dem Radius eines Kreises die Seite eines flächengleichen Quadrats zu konstruieren), stießen die Griechen unter anderem auf die Quadratrix. Diese kann man sich folgendermaßen entstanden denken:

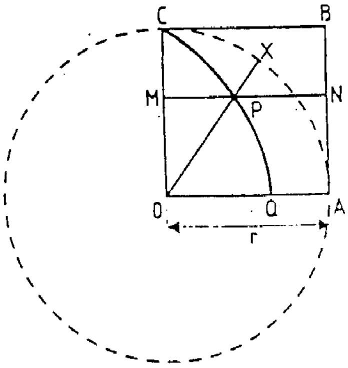

Abb. 7

Einem Quadrat OABC ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt O und Radius $r = \overline{OA}$ eingeschrieben. Der Radiusvektor $\overrightarrow{OX}$ drehe sich gleichförmig von OC nach OA, und die Gerade MN bewege sich in demselben Zeitraum gleichförmig von CB nach OA. Die Quadratrix ist dann die Menge aller Schnittpunkte von OX mit MN.

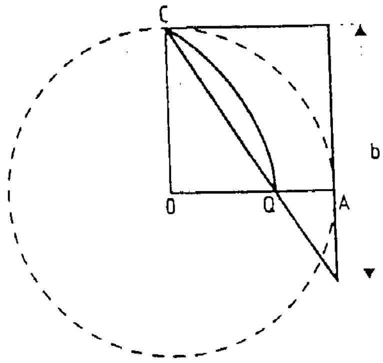

Abb. 8

Man kann zeigen, dass für die Länge des Viertelkreisbogens b durch C, X und A gilt:

$$\frac{b}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OQ}}$$

D.h.:

$$\frac{b}{r} = \frac{r}{\overline{OQ}}$$

(Der Beweis ist etwas langwierig; vgl. Kaiser/Nöbauer 1984, S. 143.)

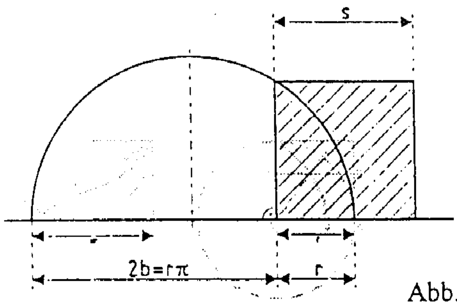

Abb. 9

Diese Beziehung gestattet nun, aus der Länge der Strecke [O,Q] eine Strecke mit der Länge b zu konstruieren (Abb. 8), woraus wieder mit Hilfe des Höhensatzes (Abb. 9; verkleinert) die gesuchte Seite jenes Quadrats ermittelt werden kann, dessen Flächeninhalt gleich dem des Kreises mit dem gegebenen Radius r ist.

Die Archimedische Spirale

Auch die Archimedische Spirale kann zur Lösung des Problems der Quadratur des Kreises verwendet werden. Eine Archimedische Spirale entsteht, wenn eine Halbgerade mit Anfangspunkt O gleichförmig um O gedreht wird und sich gleichzeitig ein Punkt P auf der Geraden gleichförmig von O aus wegbewegt.

In Polarkoordinaten kann eine Archimedische Spirale mit Hilfe der Gleichung $r = a \cdot \Theta, a \in \mathbb{R}$, konstant, beschrieben werden.

Um die Archimedische Spirale zur Lösung des Quadraturproblems verwenden zu können, überlegt man folgendermaßen: Man wählt jenen Punkt Q auf der Spirale, der dem Polarwinkel $\Theta = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

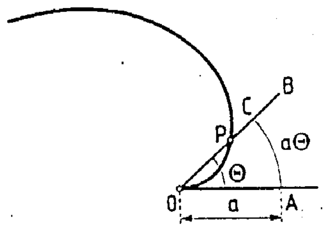

Abb. 10

Dann gilt: $\overline{OQ} = a \cdot \frac{\pi}{2}$

Wählt man nun auf der waagrechten Geraden durch O einen Punkt R derart, dass $\overline{OR} = 2 \cdot a$, so besitzt das Rechteck ORSQ den Flächeninhalt:

$$A = 2a \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} = a^2\pi$$

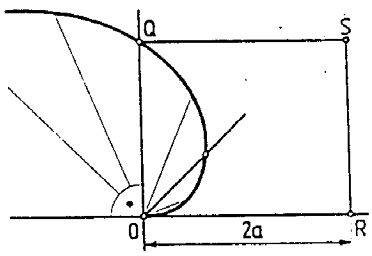

Abb. 11

Weitere Anregungen zu diesen und ähnlichen Kurven bietet die „Kurvenseite von Th. Weth" im Internet, wo auch weitere Links sowie Literaturhinweise zu finden sind.

6 Kurven als geometrische Veranschaulichung von Abhängigkeiten zwischen Größen

Waren bei den Griechen in der Antike die Kurven von primärem Interesse und die Symptome im wesentlichen nur Mittel zur Beschreibung bzw. Charakterisierung der Kurven, so war bei Nicole Oresme (1320? – 1383?) und späteren Mathematikern die Abhängigkeit selbst von Interesse, während die graphische Darstellung eher die logisch nachgeordnete Rolle einer Veranschaulichung spielte. Diese Sichtweise führte in den folgenden Jahrhunderten zur Herausbildung des Funktionsbegriffs im 17. Jahrhundert.

7 Variable und Formeln

Die Einführung von Variablen durch F. Viète zu Ende des 16. Jahrhunderts ermöglichte die Darstellung von Abhängigkeiten – und von Kurven – durch Gleichungen. Auf dieser grundlegenden Idee aufbauend entwickelte R. Descartes in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts die analytische Geometrie.

Insbesondere anhand algebraischer Gleichungen und den entsprechenden Kurven bildeten sich Anfang bis Mitte des 17. Jahrhunderts die Vorstufen zur Differential- und Integralrechnung aus, die dann von Newton und Leibniz in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts zu einer einheitlichen Methode ausgebaut wurde.

8 Kurven als physikalische Bahnen

Der Aufschwung der Physik und der Astronomie zu Beginn der Renaissance brachte es auch mit sich, dass Bewegungsvorgänge studiert und zu ihrer Beschreibung Kurven verwendet wurden. Kepler erkannte, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind, und konnte dabei auf das rund 2000 Jahre davor von Menaichmos und vor allem Apollonios geschaffene Wissen aufbauen. Auch die Untersuchung von Geschoßbahnen führte zu einer intensiven Beschäftigung mit solchen Kurven. Neben diesen algebraischen Kurven interessierte man sich insbesondere für die Rollkurve, die Zykloide, auf die Ch. Huygens bei seinen Überlegungen, ganggenaue Uhren zu konstruieren, stieß und die dann in der Folge von ihm und vor allem von Leibniz eingehend untersucht wurde.

9 Funktionen als Darstellungsmittel und Untersuchungsobjekt der Analysis

Die Entwicklung des Calculus einerseits und die explizite Einführung des Funktionsbegriffs andererseits etablieren diesen als einen der zentralsten Begriffe der gesamten Mathematik. Der Ausbau der Differential- und Integralrechnung führte auch zu einem Ausbau der Funktionenlehre und lieferte eine große Zahl neuer Kurven (z.B. als Lösungskurven von Differentialgleichungen).

10 Funktionen als Gegenbeispiele

Im Zuge der Exaktifizierung der Analysis und der Herausbildung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfanden die Mathematiker "bizarre" Funktionen, um die Grenzen dieser Begriffe abzustecken; zum Beispiel:

- die Dirichletsche Sprungfunktion

$$di(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  als Beispiel einer nirgends stetigen Funktion, und

- das Weierstraßsche "Monster"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \pi x) \qquad (a \in \mathbb{N}, \text{ungerade}, b \in]0;1[, a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2})$$

als ein Beispiel einer überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion. (Vgl. Volkert 1992, S. 74, Hewitt/Stromberg 1969, S. 258)

Die Bizarrheit dieser Funktionen äußert sich vor allem darin, dass sie sich einer einigermaßen adäquaten geometrischen Darstellung als "Kurve" – und damit auch der Anschauung – entziehen. Für viele Mathematiker war die Existenz solcher Funktionen ein Schock. Charles Hermite schrieb 1893 in einem Brief an Thomas Jan Stieltjes:

> *"Ich wende mich mit Entsetzen und Schrecken ab von dieser bejammernswerten Plage von Funktionen, die überhaupt keine Ableitung besitzen."*

(Zitiert nach Rüthing 1986, S. 15)

Hermite versuchte auch Henry Lebesgue daran zu hindern, eine Arbeit über nicht differenzierbare Flächen zu publizieren. Später schrieb Lebesgue über Hermites Zurückweisung seiner Arbeit:

> *"Er muss gedacht haben, dass diejenigen, die sich in diese Untersuchung vergraben, ihre Zeit verschwenden, statt sie nützlicher Forschung zu widmen."*

Und er sagte auch:

> *"Für viele Mathematiker wurde ich derjenige mit den Funktionen ohne Ableitung. Und da Hermites Furcht und Schrecken von fast jedem geteilt wurden, so würde bei jeder mathematischen Diskussion, an der ich teilzunehmen suchte, ein Analytiker existieren, der sagt: "Dies wird Sie nicht interessieren; wir diskutieren über Funktionen, die Ableitungen besitzen."*
> (Stewart 1990, S. 229)

Es stellte sich sogar heraus, dass die differenzierbaren Funktionen sogar die "Ausnahmen" unter den stetigen Funktionen sind. (Genauer: Sie bilden in der Menge der auf einem kompakten Intervall stetigen Funktionen eine Teilmenge von erster Kategorie, das ist eine Menge, die eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen ist. Vgl. etwa Hewitt/Stromberg 1969, S. 68 und 260.)

11 Peanokurven

Die Frage, ob jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion rektifizierbar ist, d.h. eine endliche Bogenlänge besitzt, führte auf eine andere Art von Monster: Die Peanokurve ist ein Beispiel einer auf [0;1] stetigen Kurve, die durch jeden Punkt des Einheitsquadrats geht, d.h. das Einheitsquadrat vollständig ausfüllt. (Vgl. Peano 1890; siehe auch Kranzer 1989, S. 96 - 98; Volkert 1992, S.73) Eine weitere Kurve dieser Art ist die "Hilbert-Kurve" (Hilbert 1891)

12 Die Diracsche Deltafunktion

Der Versuch, ein mathematisches Modell eines (unendlich kleinen) Massenpunktes mit der Masse m>0 bzw. einer Punktladung, eines (nur eine "unendlich kurze Zeit" dauernden) Kraftstoßes o.ä. zu bilden, führte zur Diracschen Deltafunktion. Solange der Masse (o.B.d.A.: m=1) eine Ausdehnung >0 zugeschrieben wird, kann sie durch folgende Massenverteilungsfunktion beschrieben werden:

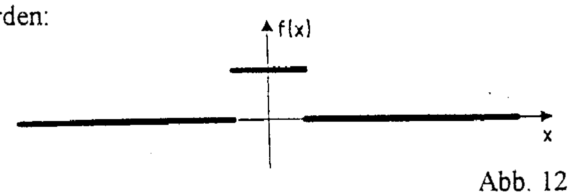

Abb. 12

Dabei gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Lässt man nun bei unverändertem Wert m (d.h. unter Beibehaltung der obigen Gleichung) die Ausdehnung der Masse gegen 0 streben (also zum Massenpunkt werden), so geht f über in die "Funktion" δ mit:

$$\delta : R \to R \,|\, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq 0 \\ \infty, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

(Vgl. Rüthing 1986, S. 21f.)

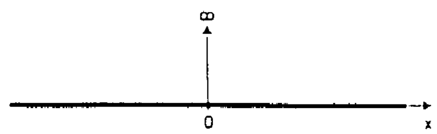

Abb. 13

13 Kochkurve; Fraktale

Wenn man über dem mittleren Drittel einer Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Basis entfernt, erhält man:

Abb. 14

Führt man nun dasselbe Prinzip bei jeder der vier Teilstrecken durch, bei der entstehenden Figur wieder usw. so erhält man eine "Kurve", die man nach Helge von Koch als Kochsche Kurve bezeichnet. (Koch 1904 und 1906) Sie ist eine überall stetige, aber nirgends differenzierbare Kurve.

Abb 15

Startet man statt mit einer Strecke mit einem gleichseitigen Dreieck, so ergibt sich nach diesem Verfahren die "Schneeflockenkurve" (Abb. 16). Sie stellt ein Beispiel einer geschlossenen Kurve mit unendlicher Länge dar, die aber eine Fläche von endlichem Inhalt umschließt.

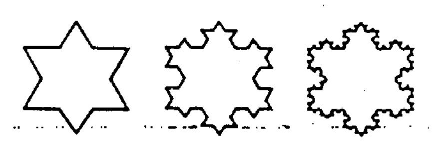

Abb. 16

Die Koch-Kurve ist eines der ersten Beispiele eines Fraktals. Obwohl schon zu Beginn unseres Jahrhunderts theoretisch erdacht, erfuhren sie Interesse und Verbreitung erst nach der Verfügbarkeit eines adäquaten Repräsentationsmittels bzw. Werkzeugs: des Computers. Ähnliches gilt für Julia-Mengen, Cantorsches Diskontinuum (Cantor 1883), Sierpinski-Dreieck (Sierpinski 1916), Mengerschwamm (Vgl. Götz/Reichel 1990), Chaostheorie, u.a.

Begünstigt durch die weite Verbereitung von Computern und eine große Zahl (auch allgemeinverständlicher) Bücher sind Fraktale heute weit über die Mathematik hinaus verbreitet. Sie haben einerseits Eingang in die Kunst gefunden, andererseits könnten sie auch zu einem Paradigma der Naturwissenschaften werden, da man auch in der Natur fraktale Strukturen zu erkennen glaubt. (Vgl. Devlin 1990, S. 91 – 118.)

14 Einige abschließende Bemerkungen

Der Streifzug zeigt, dass mathematische Objekte verschiedene Aspekte besitzen, die in verschiedenen Epochen von unterschiedlicher Bedeutung sein können. Ein solcher Bedeutungswandel ist meist auf den Einfluss von Entwicklungen in solchen Bereichen zurückzuführen, die bis dahin nicht unmittelbar zu dem betreffenden Gebiet gehörten. Durch die Einführung der Variablen und die daraus resultierende Möglichkeit der Beschreibung von Kurven durch Gleichungen bzw. analytische Ausdrücke wird der geometrische Aspekt im wesentlichen auf die Rolle der Veranschaulichung reduziert (zumindest in der Analysis; in der analytischen Geometrie bleiben algebraischer und geometrischer Aspekt "gleichberechtigt"). Die weitere Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert zeigt schließlich die Grenzen des geometrischen Kurvenbegriffs – und die Grenzen der Anschauung – auf. Der mengentheoretische Funktionsbegriff trägt über die geometrische Vorstellung hinaus. Dennoch wird der Kurvenbegriff nicht obsolet: Da der Funktionsbegriff in gewissem Sinne sogar zu weit trägt, sind Abgrenzungseigenschaften vonnöten; diese sind nicht selten durch den geometrischen Aspekt motiviert (Stetigkeit, Glattheit, Zusammenhang, u.ä.) Abseits davon erlebt der Kurvenbegriff in der Fraktalen Geometrie eine interessante und faszinierende Renaissance und Verallgemeinerung.

Am Beispiel der Kurve kann man auch die Bedeutung der Mittel, d.h. der Repräsentationsform für die Entwicklung der Mathematik erkennen. Durch die Einführung der Variablen war es einfach, ja in gewisser Weise sogar naheliegend, ausgehend von den Kegelschnitten – nunmehr als algebraische Kurven zweiten Grades erkannt – zu beliebigen algebraischen Kurven überzugehen. Dieser Schritt wäre für die Griechen mit ihrer rein geometrischen Repräsentation nur schwer vorstellbar.

Entwicklungen in der Mathematik gehen meist nicht gleichmäßig vonstatten, sondern sprunghaft. Dabei spielt die Verfügbarkeit von Mitteln, insbesondere neuer Mittel, oft eine große Rolle. (Vgl. R. Fischer 1988!) Ein erster "Quantensprung" auf dem Gebiet der Kurven ergab sich durch das Mittel "Variable", d.h. durch die Möglichkeit der Beschreibung von Kurven durch Gleichungen. Der zweite Quantensprung wurde durch den Computer ermöglicht: die rasche Ausführung rechenintensiver Iterationen erweckte Kochkurve, Hilbertkurve, Julia-Mengen u.ä. aus einem jahrzehntelangen Dornröschenschlaf. Nicht die Idee allein, sondern auch die Möglichkeiten der Repräsentation, der Realisierung und der Verbreitung sind in der Wissenschaftsentwicklung von entscheidender Bedeutung.

Literatur

BMUKS (Hrsg.): Handreichungen Geschichte und Sozialkunde, Heft 15, Klagenfurt, Oktober 1987b

Bretschneider, C. A.: Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch
B. G. Teubner, Leipzig 1870

Cantor, G.: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V
Math. Annalen 21 (1883), S. 545 – 591

Devlin, K.: Sternstunden der modernen Mathematik
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1990

Euklid: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980

Fischer, R.: Mittel und System. Zur sozialen Relevanz der Mathematik
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1988, Heft 1, S. 20 – 28

Götz, S., Reichel, H. Ch.: Fraktale Dimensionen – Über das Titelbild des Oberstufenlehrbuches Reichel-Müller-Laub
Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 18, Oktober 1990, S. 124 – 142

Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis
Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1969

Hilbert, D.: Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück
Math. Annalen 38 (1891), S. 459 – 560

Kaiser, H., Nöbauer , W.: Geschichte der Mathematik
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984

Koch, H. v.: Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géometrique élémentaire
Arkiv för Matematik 1 (1904), S. 681 – 704

Koch, H. v.: Une méthode géometrique élémentairepour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes
Acta Mathematica 30 (1906), S. 145 – 174

Kranzer, W.: So interessant ist Mathematik
Aulis-Verlag Deubner&Co, Köln 1989

Kronfellner, M.: Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unerrichtsspezifischen Beispielen.
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1998

Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule – Unterstufe Österreichischer Bundesverlag, Wien, Jugend und Volk, Wien, 1985

Oettinger, E. (Hrsg.): Winkeldrittelung und Konchoide
mathe-plus 1, Oktober 1984, S. 8 – 12

Oettinger, E. (Hrsg.): Die Zissoide oder "Efeuartige"
mathe-plus 3, Februar 1985, S. 4 – 7

Peano, G.: Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane
Math. Annalen 36 (1890), S. 157 – 160

Radbruch, K.: Mathematik in den Geisteswissenschaften
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1989

Reichel, H.-Ch.: Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und einige allgemeine allgemeine Bemerkungen zum Thema "Kegelschnitte" im Unterricht
Didaktik der Mathematik 2, 1991a, S. 111 – 130

Rüthing, G.: Einige historische Stationen zum Funktionsbegriff
Der Mathematikunterricht 1986, Heft 6, S. 4 – 25

Schweiger, F.: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik
Journal für Mathematikdidaktik 13 (1992), Heft 2/3, S. 199 – 214

Sierpinski, W.: Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donné
C. R. Acad. Paris 162 (1916), S. 629 – 632

Stewart, I.: Mathematik. Probleme – Themen – Fragen
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990

Volkert, K.: Anschauung und Formalismus in der Mathematik
Spektrum der Wissenschaft, März 1992, S. 72 – 80

Vollrath, H. J.: Störungen des "didaktischen Gleichgewichts" im Mathematikunterricht
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40/6 (1987), S. 373 – 378

van der Waerden, B. L.: Erwachende Wissenschaft
Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1966 (2. Auflage)

Wagenschein, M.: Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht
(hrsg. von E. Löffler) Der Mathematikunterricht 8 (1962), Heft 4